

# RÉSOLUTION ANALOGIQUE D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

*Comment résoudre des équations différentielles grâce à des méthodes analogiques et quelles en sont les limites ?*

TIRE - AULYS VINAY  
13238



1006169700

# PLAN

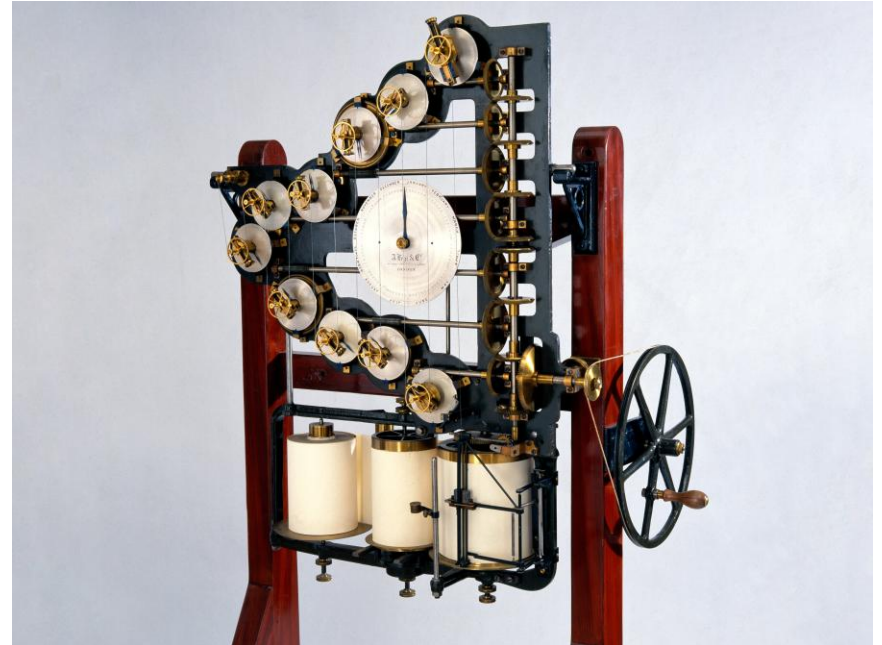
1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison avec le numérique
6. Conclusion

# Exposition du problème



Derniers ordinateurs analogiques

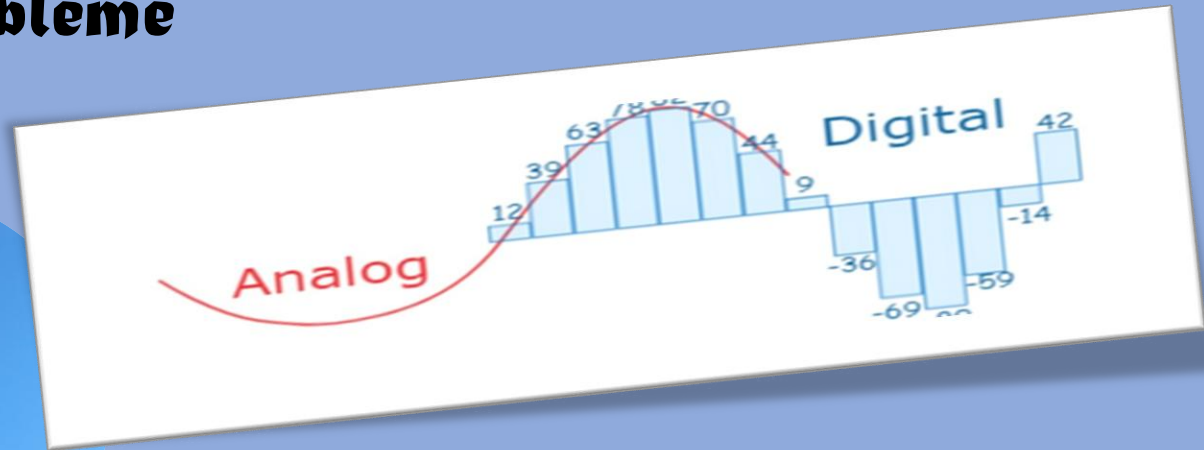
1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion



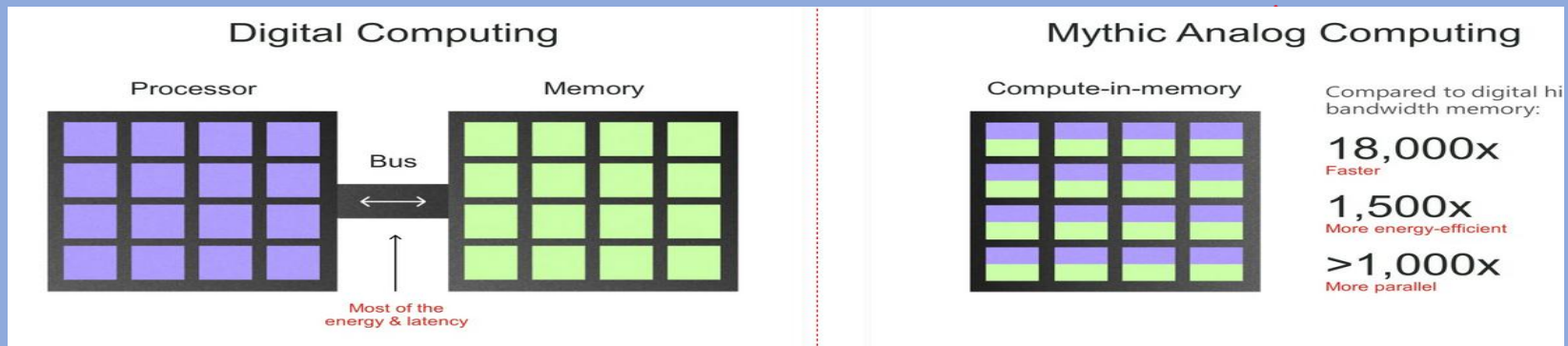
Machine à marées de Thomson



# Exposition du problème



**"400× fast than a modern workstation"** Bernd Ulmann - Analog Computing



# Principe de la résolution

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

Schéma analytique représentant la méthode de résolution de Kelvin :

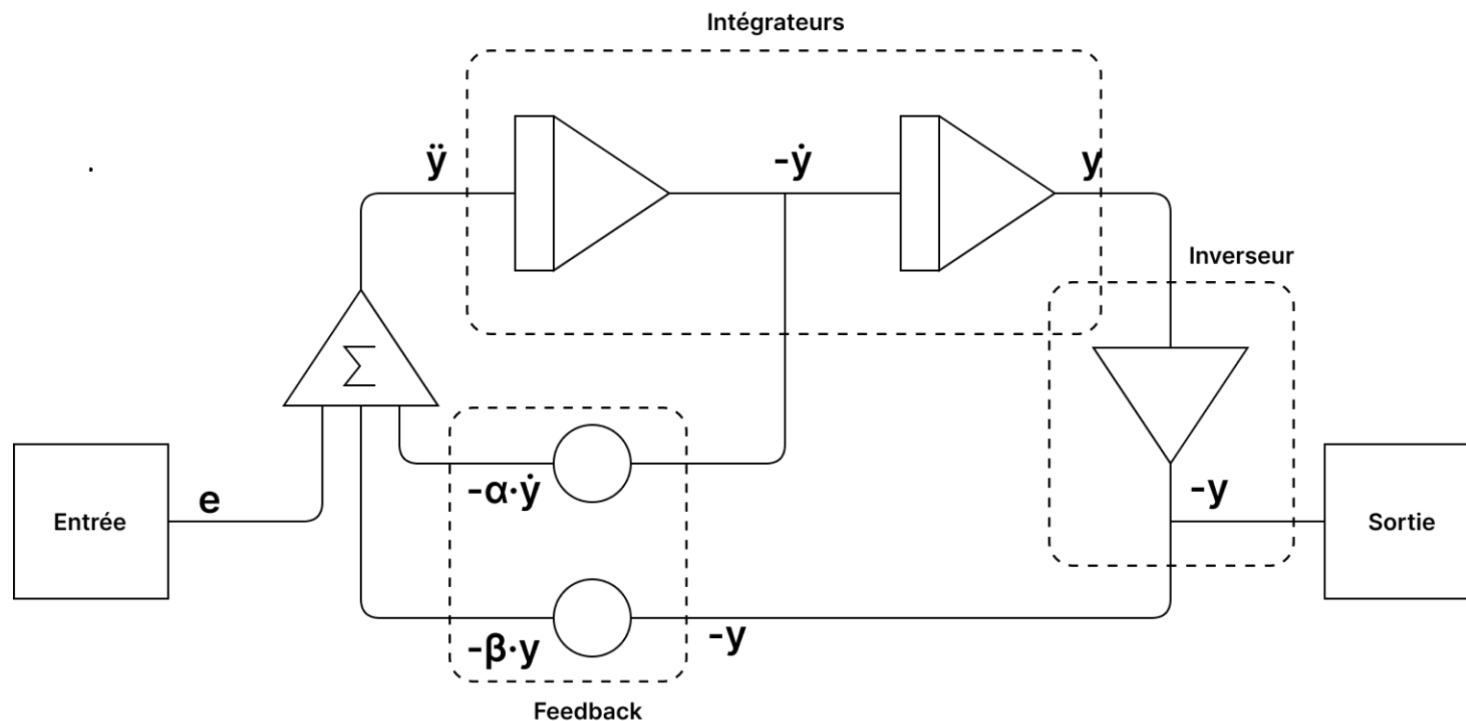


Diagramme modélisant l'équation :  $\ddot{y} + \alpha \dot{y} + \beta y = e$

# Création du circuit

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

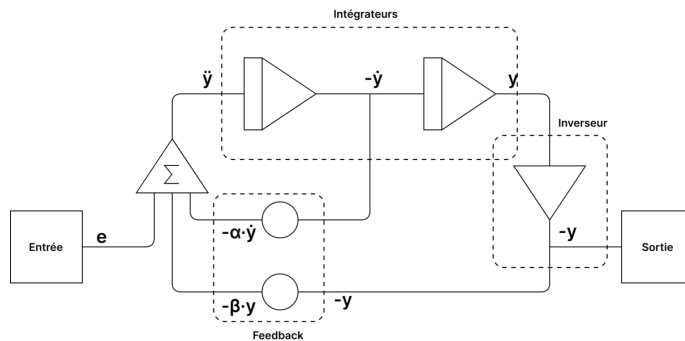
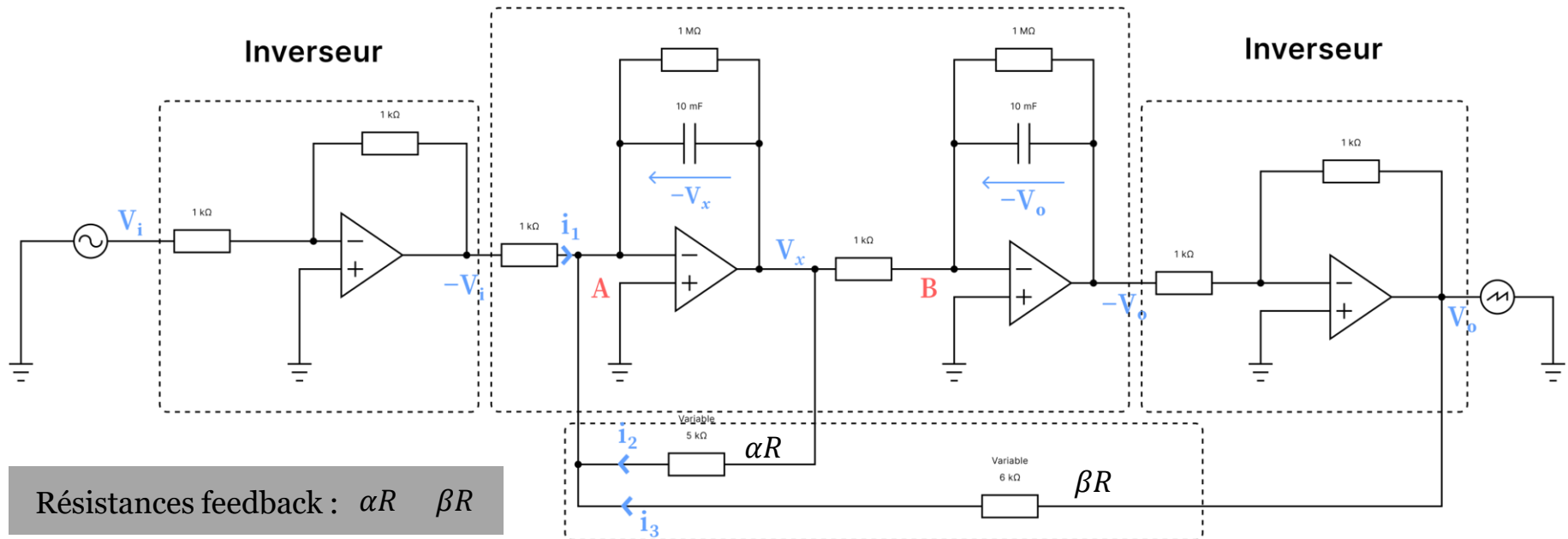


Diagramme modélisant l'équation :  $\ddot{y} + \alpha\dot{y} + \beta y = e$

## Intégrateurs

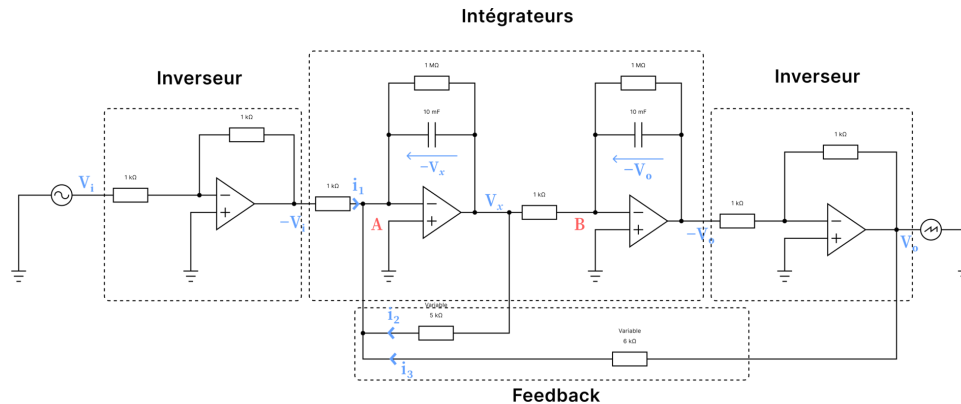


Résistances feedback :  $\alpha R$   $\beta R$

Où  $R = 1 \text{ k}\Omega$

# Création du circuit

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion



La loi des nœuds en A donne :

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_c + i_{R'}$$

On a donc l'équation suivante, qu'on note (1):

$$\frac{-V_i}{R} + \frac{V_0}{\beta R} + \frac{V_x}{\alpha R} - C \frac{dV_x}{dt} - \frac{V_x}{R} = 0$$

La loi des nœuds en B donne :

$$\frac{V_x}{R} = C \frac{dV_0}{dt} - \frac{V_0}{R}$$

On isole  $V_x$  et on substitue dans (1) :

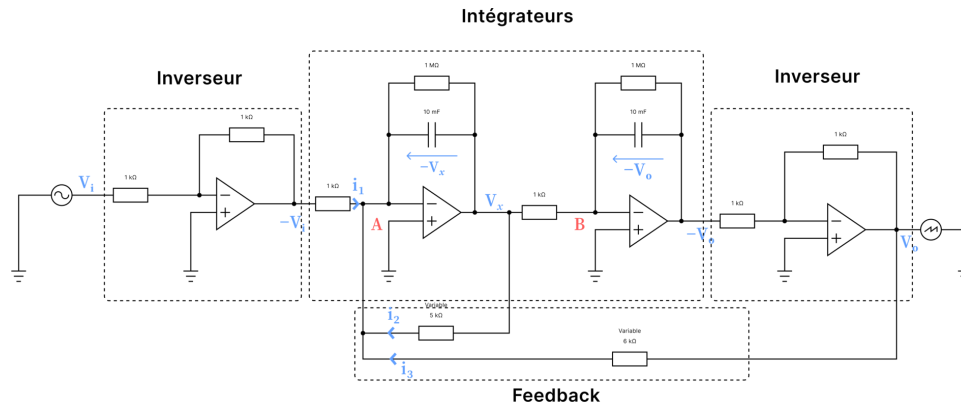
$$V_i = R^2 C^2 \frac{d^2 V_0}{dt^2} + \left[ \frac{RC}{\alpha} + 2RC \frac{R}{R'} \right] \frac{dV_0}{dt} + \left[ \frac{1}{\beta} + \frac{R}{R'} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{R}{R'} \right) \right] V_0$$

On considère que  $R$  négligeable devant  $R'$ , ce qui donne sous forme normalisée :

$$\frac{d^2 V_0}{dt} + \frac{1}{\alpha RC} \frac{dV_0}{dt} + \frac{V_0}{\beta (RC)^2} = \frac{V_i}{(RC)^2}$$

# Création du circuit

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion



$$V_0(t) = (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))e^{kt} + C$$

$$\omega = \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{4\alpha^2}}$$

$$k = -\frac{1}{2\alpha RC}$$

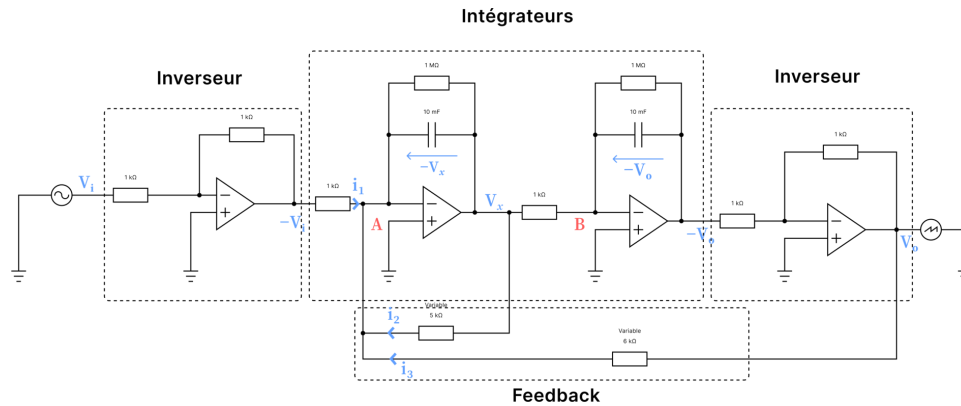
$$A = -V_i(t)\beta \quad B = \frac{V_i(t)\beta k}{\omega}$$

$$C = V_i(t)\beta$$



# Création du circuit

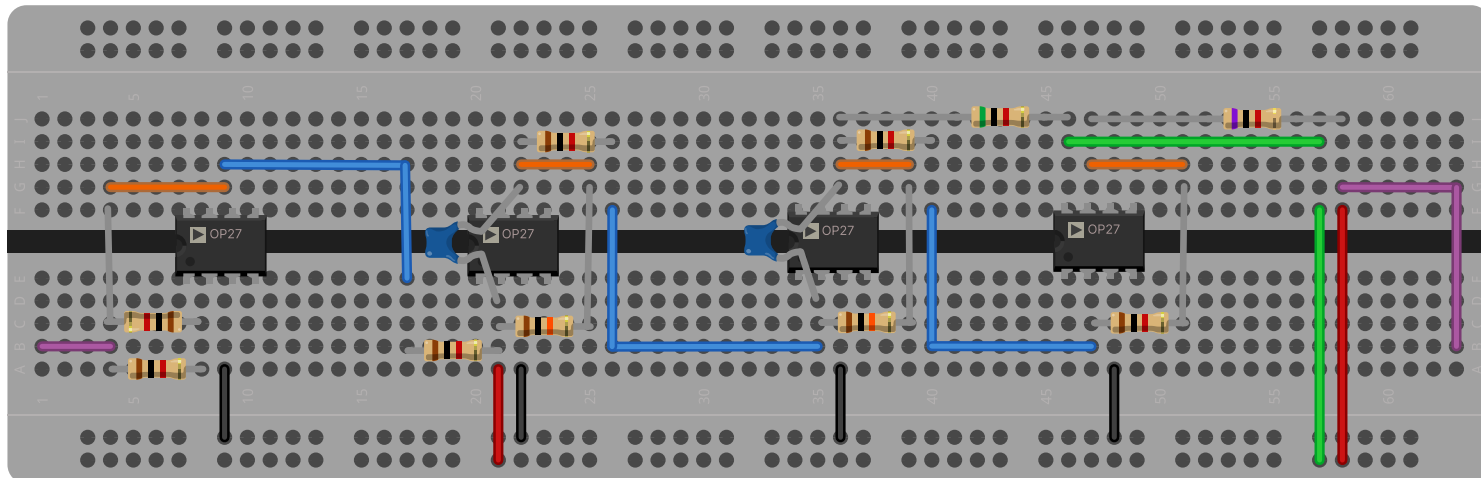
1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion



Inverseur

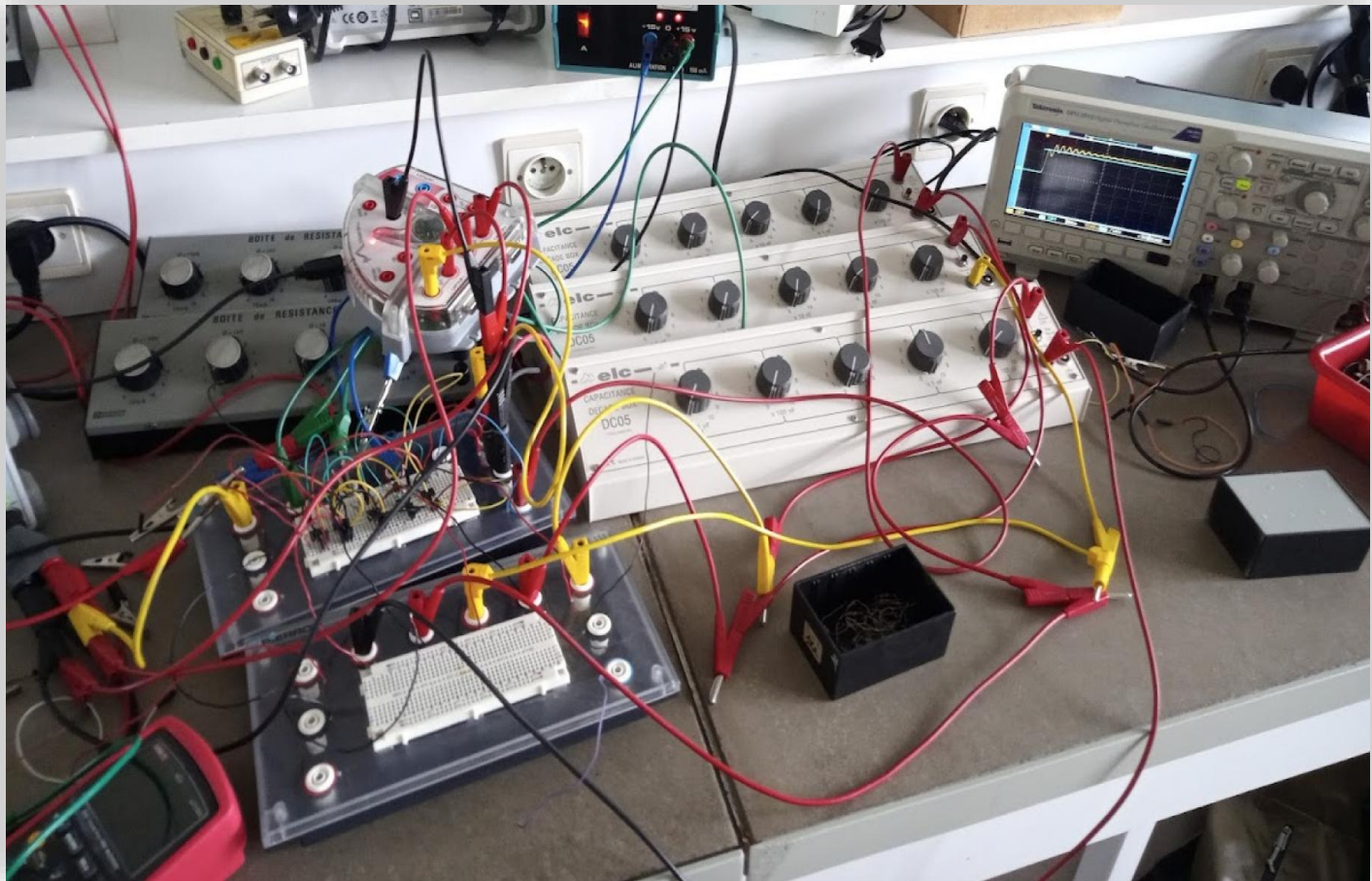
Intégrateurs

Inverseur



# Création du circuit

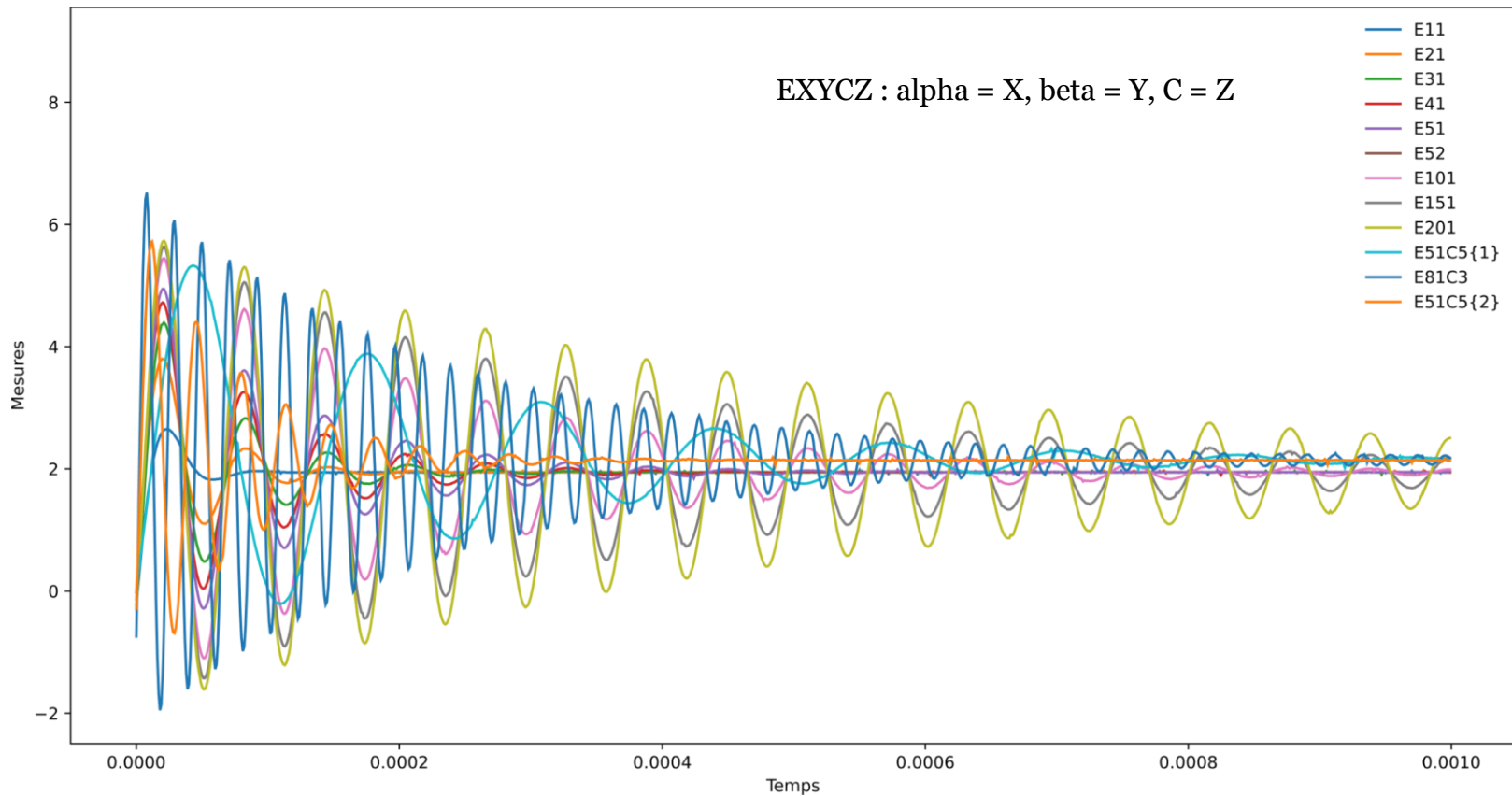
1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion



# Exploitation des données

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

Aquisition de données du circuit grâce à une carte d'acquisition :



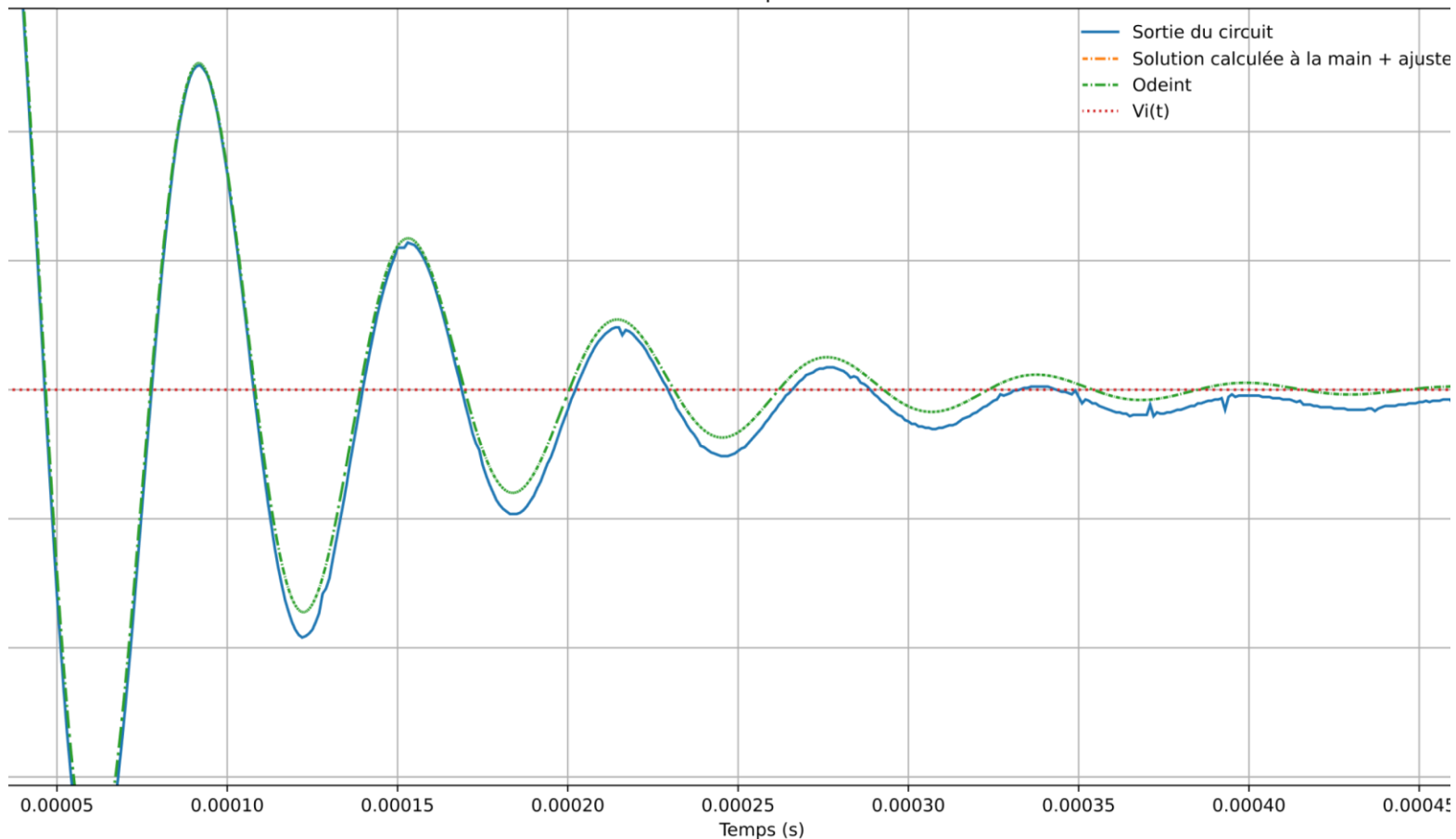
# Exploitation des données

Pour  $V_i = 2V$ , la valeur finale obtenue est  $1,92V$ . On a donc un écart de 4% environ.

Explicable par l'incertitude de 5% sur les composants.

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

Résolution des deux équations différentielles



# Limites en H.F.

1<sup>e</sup> hypothèse :

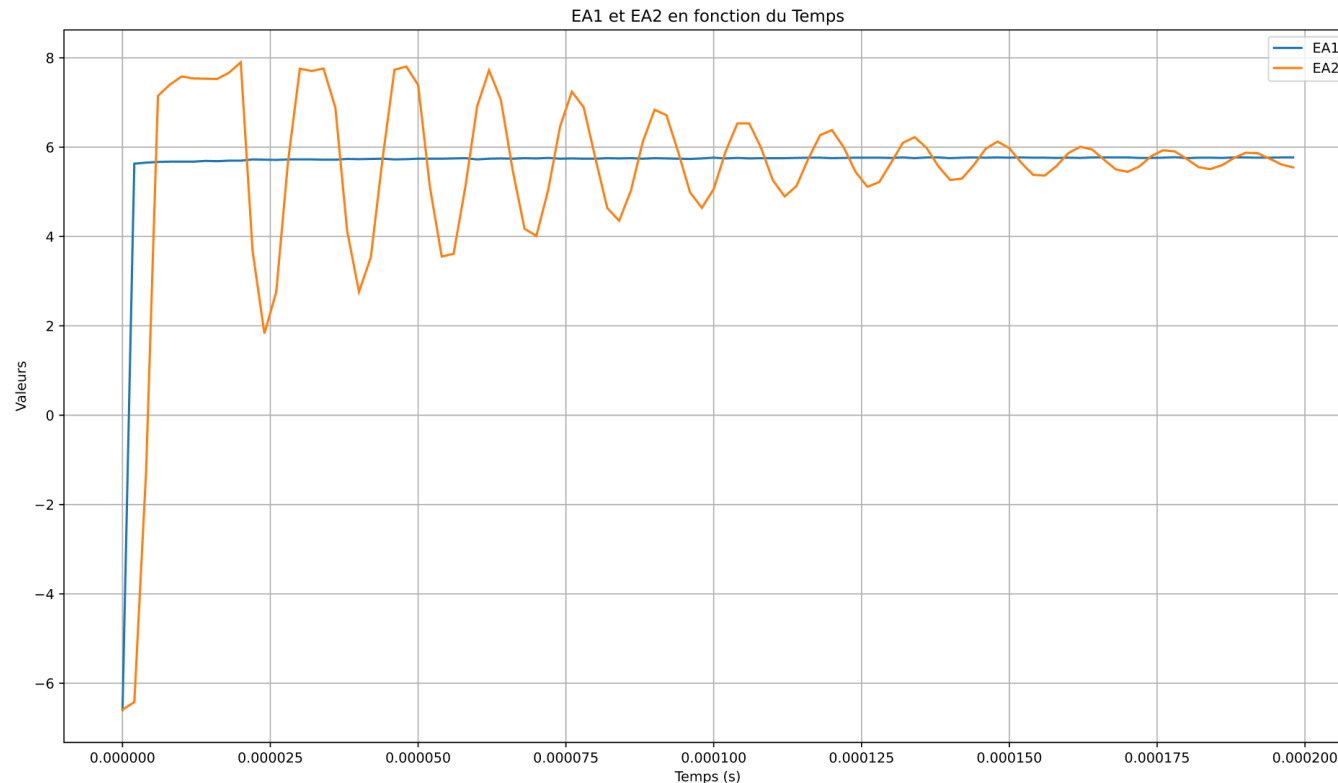
Hypothèse de l'ALI idéal non valide

2<sup>e</sup> hypothèse :

Saturation de l'ALI

Saturation en courant : non symétrique et hauteur fixe (en réglant l'offset du GBF)

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

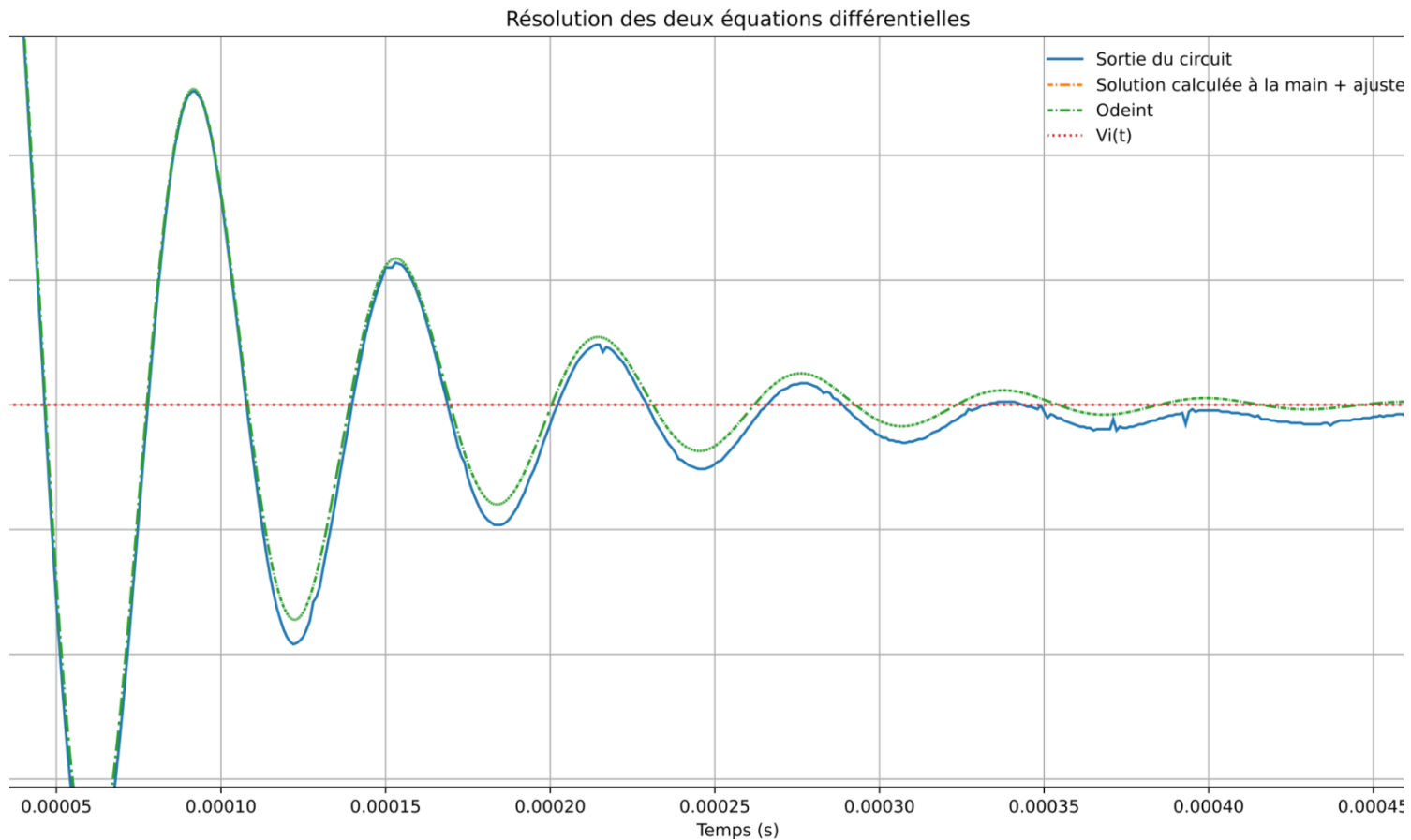


# Comparaison précision

Tracé des courbes exacte, numérique et analogique

Odeint annonce un écart de 0,005% maximum.

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion





# Comparaison énergétique

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

## Coût d'un calcul numérique :

Puissance d'un processeur : 100 W

Durée de calcul pour une ED d'ordre 3 : 10 ms

Énergie consommée : **1 Joule**

## Coût d'un calcul analogique :

Puissance de 5 ALI :  $5 \times (30 \text{ V} \times 10 \text{ mA} = 0,3 \text{ W}) = 1,5 \text{ W}$

Puissance du GBF : 3 W + 10 mW (10 mW pour la sortie générée)

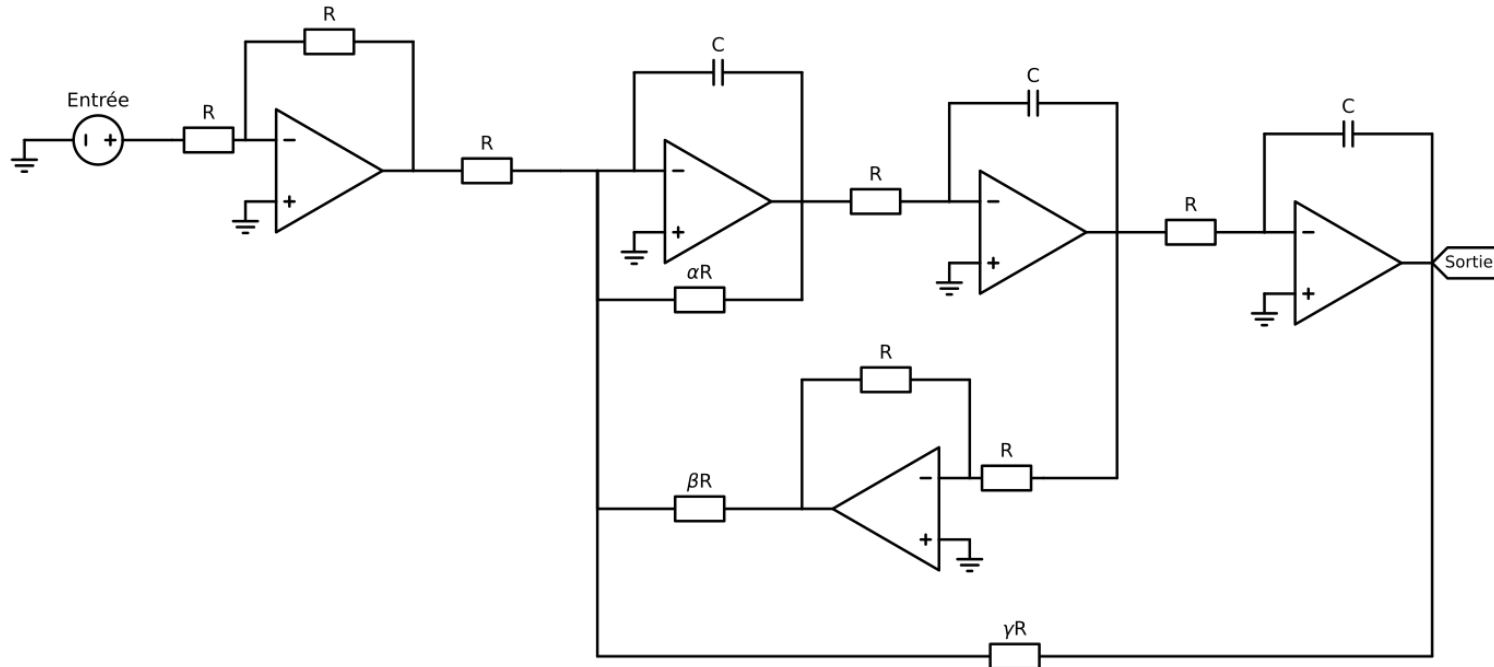
Durée de calcul, durée d'affichage sur l'oscilloscope (pas de temps de calcul propre) : 200  $\mu\text{s}$

Énergie consommée :  **$1.10^{-4}$  Joules**

# Ordre supérieur

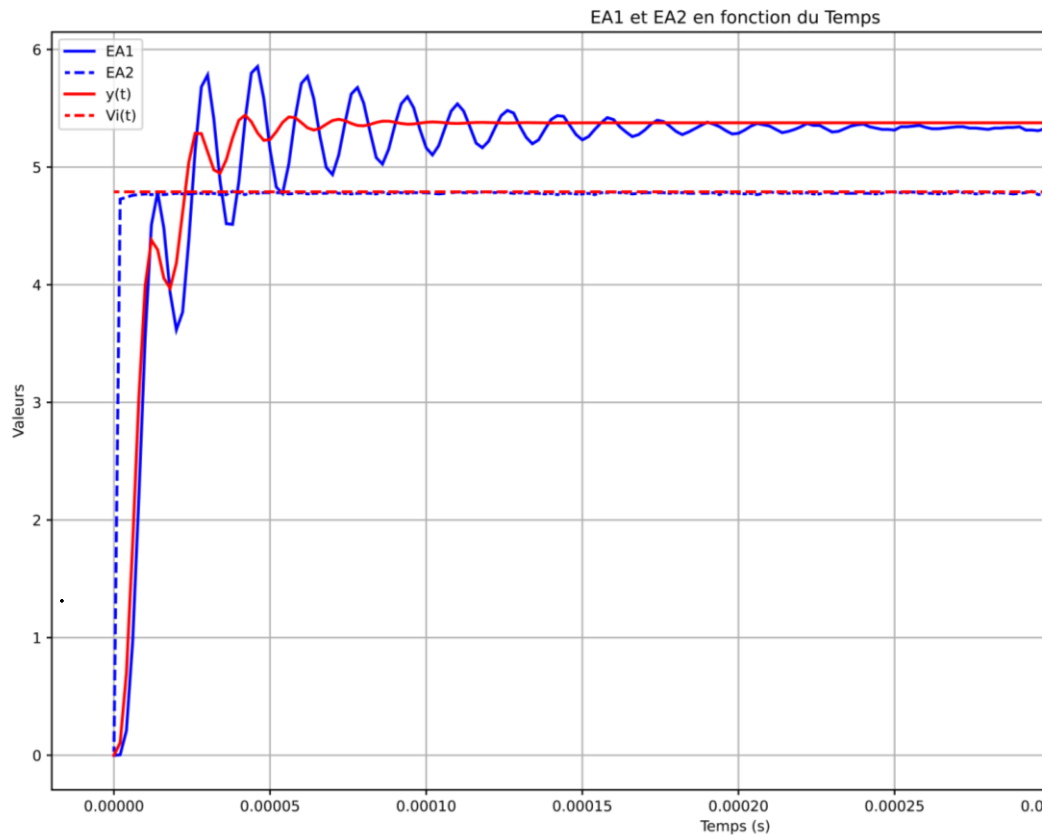
1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

Circuit d'ordre 3

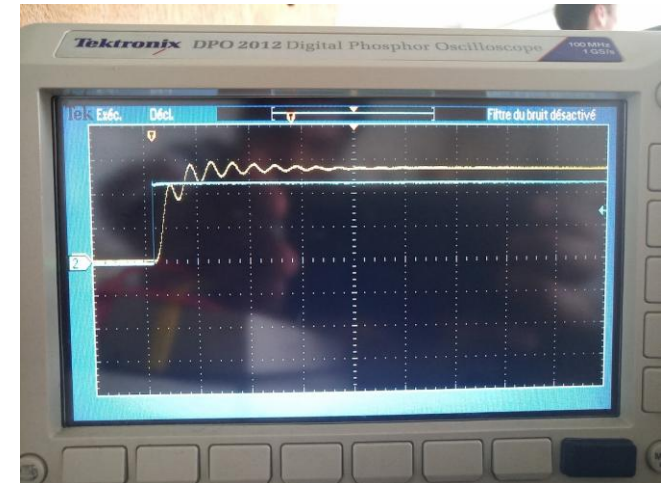


# Ordre supérieur

Bleu : solution générée | Rouge : solution attendue (python)



1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion

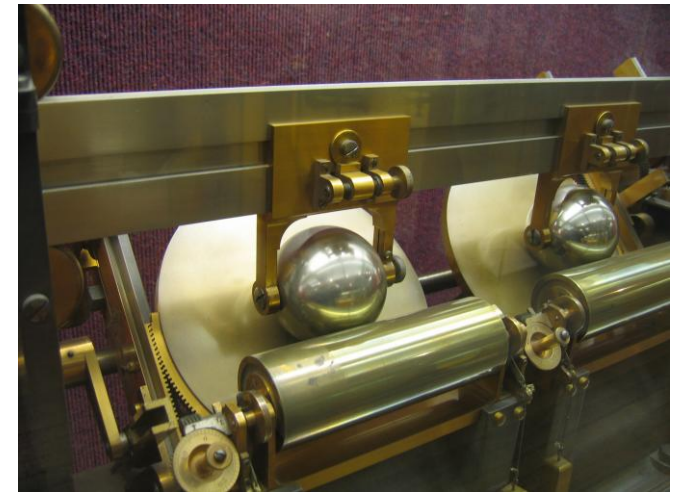


# Compléments



Exemple d'intégrateur mécanique en LEGO remplaçant un ALI intégrateur

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion
8. Compléments



Solveur d'équadiff mécanique avec deux intégrateurs (source : Wikipédia)

# Compléments

```
1 import pandas as pd
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 import numpy as np
4
5 fichier = r"ordre3.csv"
6
7 # Lecture du CSV avec des séparateurs et décimales adaptés
8 don = pd.read_csv(fichier, sep=';', decimal=',')
9
10 # Extraction des colonnes pour EA1 et EA2
11 T = don["Temps"].astype(str).str.replace(',', '.').astype(float)
12 EA1 = don["EA1"].astype(str).str.replace(',', '.').astype(float)
13 EA2 = don["EA2"].astype(str).str.replace(',', '.').astype(float)
14
15
16
17 # Tracé des courbes EA1 et EA2 en fonction de Temps
18 plt.plot(T, EA1, label="EA1")
19 plt.plot(T, EA2, label="EA2")
20
21
22 from scipy.integrate import odeint
23
24 # Coefficients
25 C1 = 5E-9+100E-12
26 C2 = 1E-9+100E-12
27 C3 = 10E-9+100E-12
28 R = 980
29 R1 = 1000
30 R2 = 1000
31 R3 = 1100
32 aa = R/R1
33 bb = R/R2
34 cc = R/R3
35
36 a = (R**3)*C1*C2*C3
37 b = aa*(R**2)*C2*C3
38 c = bb*(R)*C3
39 d = cc
40
```

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion
8. Compléments

Calcul solution de l'ordre 3

```
40
41 # Système d'équations
42 def system(Y, t):
43     y0, y1, y2 = Y
44     dy0dt = y1
45     dy1dt = y2
46     dy2dt = (-b * y2 - c * y1 - d * y0 + Vi(t)) / a
47     return [dy0dt, dy1dt, dy2dt]
48
49 def Vi(t):
50     return 5 + t - t
51
52 # Conditions initiales : y(0), y'(0), y''(0)
53 Y0 = [0, 0, 0]
54
55 # Plage de temps
56 t = np.linspace(0, 200E-6*2, 200)
57
58 # Résolution avec odeint
59 solution = odeint(system, Y0, t)
60
61 # Affichage
62 plt.plot(T, solution[:, 0], label='y(t)')
63 plt.plot(t, solution[:, 1], label="y'(t)")
64 plt.plot(t, solution[:, 2], label="y''(t)")
65 plt.plot(T, Vi(t), label="Vi(t)", linestyle=':')
66
67
68 plt.xlabel("Temps (s)")
69 plt.ylabel("Valeurs")
70 plt.title('EA1 et EA2 en fonction du Temps')
71 plt.legend()
72 plt.grid(True)
73 plt.show()
```

# Compléments

Sortie générée par l'intégrateur mécanique

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison et limites
6. Ordre supérieur
7. Conclusion
8. Compléments

