TIPE – Aulys VINAY

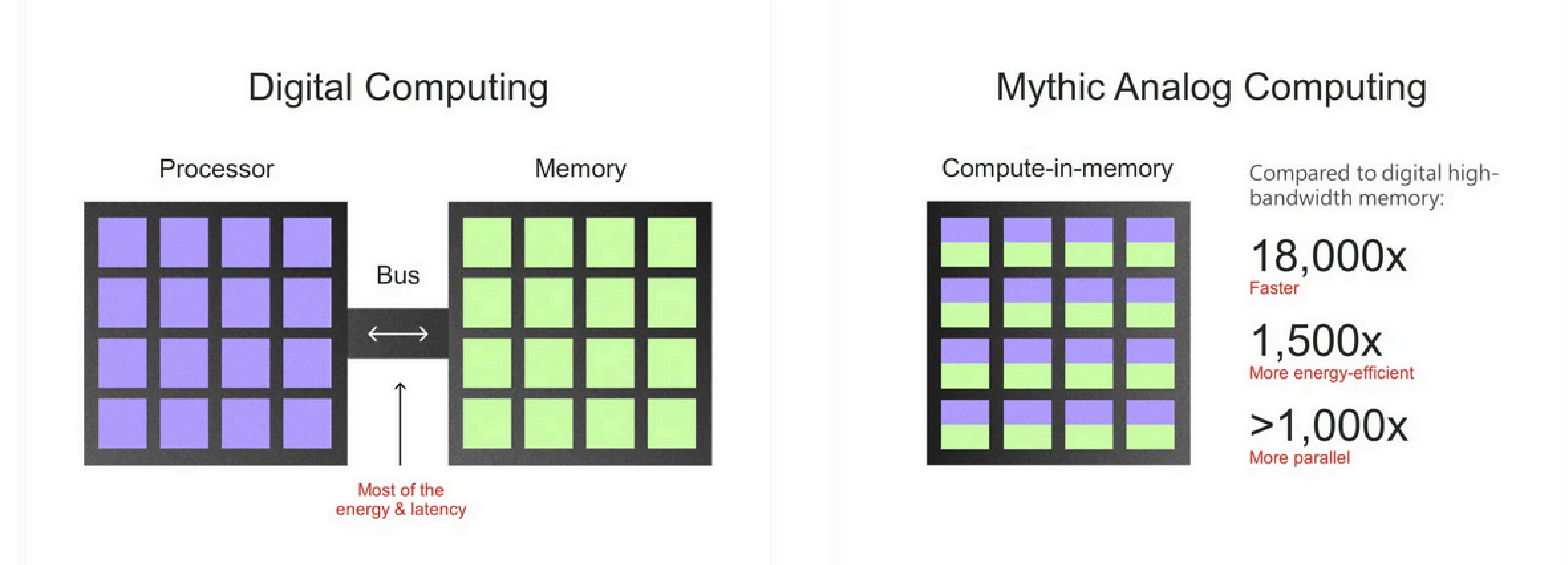
Résolution analogique d’équations différentielles

Comment résoudre des équations différentielles grâce à des méthodes analogiques et quelles en sont les limites ?

Plan

1. Exposition du problème
2. Principe de la résolution analogique
3. Création du circuit
4. Exploitation des données
5. Comparaison avec le numérique
6. Conclusion

1. Exposition du problème



2. Résolution

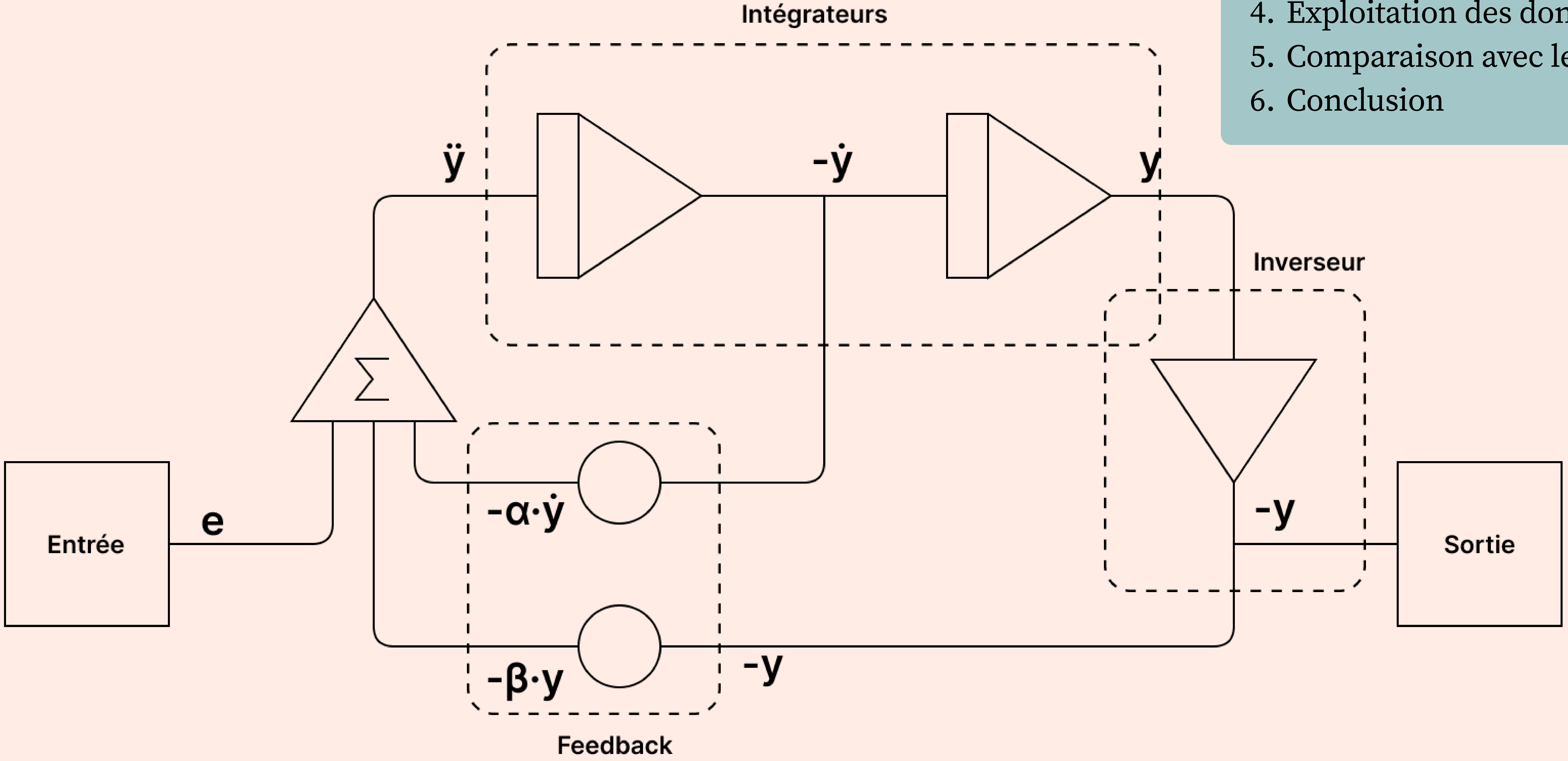
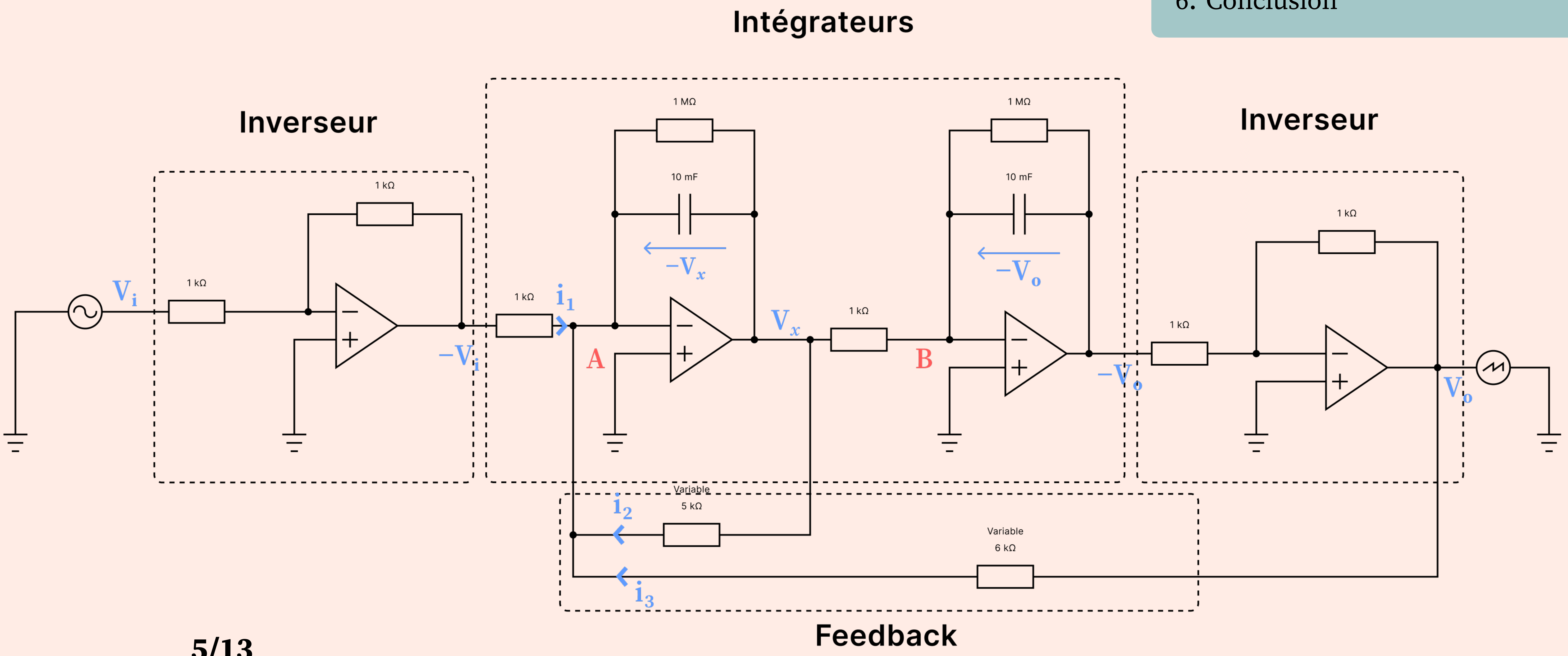


Diagramme modélisant l'équation : $\ddot{y} + \alpha\cdot\dot{y} + \beta\cdot y = e$

3. Création du circuit



3. Création du circuit

La loi des nœuds en A donne :

$$i_1 + i_2 + i_3 = i_c + i_{R'}$$

On a donc l'équation suivante, qu'on note (1):

$$\frac{-V_i}{R} + \frac{V_0}{\beta R} + \frac{V_x}{\alpha R} - C\frac{dV_x}{dt} - \frac{V_x}{R} = 0$$

La loi des nœuds en B donne :

$$\frac{V_x}{R} = C\frac{dV_0}{dt} - \frac{V_0}{R}$$

On isole Vx et on substitue dans (1) :

$$V_i = R^2C^2\frac{d^2V_0}{dt^2} + \left[\frac{RC}{\alpha} + 2RC\frac{R}{R'}\right]\frac{dV_0}{dt} + \left[\frac{1}{\beta} + \frac{R}{R'}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{R}{R'}\right)\right]V_0$$

On considère que R négligeable devant R', ce qui donne sous forme normalisée :

$$\frac{d^2V_0}{dt} + \frac{1}{\alpha RC}\frac{dV_0}{dt} + \frac{V_0}{\beta(RC)^2} = \frac{V_i}{(RC)^2}$$

3. Création du circuit

$$V_0(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{kt} + C$$

$$\omega = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{1}{\beta} - \frac{1}{4\alpha^2}}$$

$$k = -\frac{1}{2\alpha RC}$$

$$A = -V_i(t)\beta \qquad B = \frac{V_i(t)\beta k}{\omega}$$

$$C = V_i(t)\beta$$

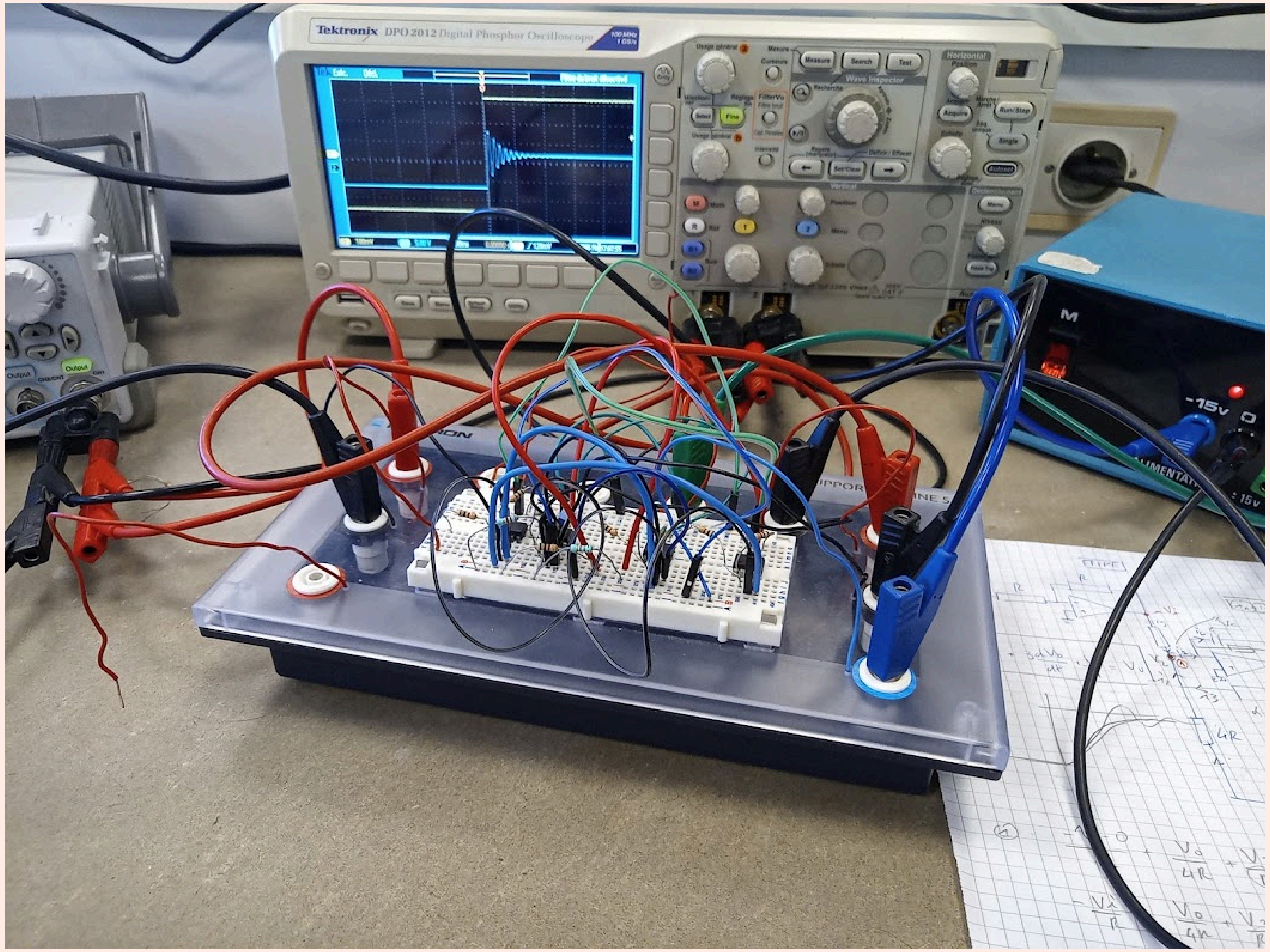
α → décroissance exponentielle

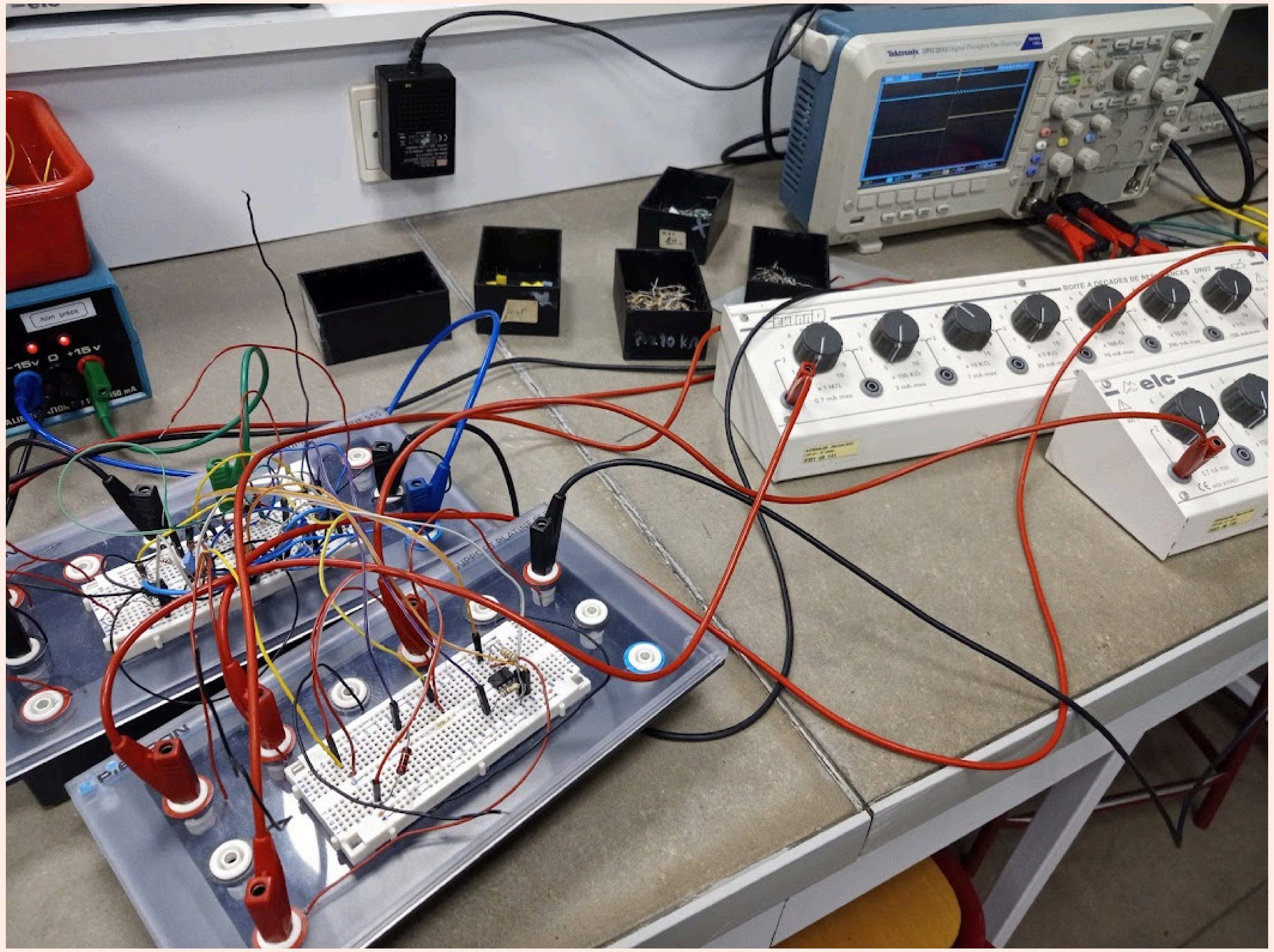
β → amplitude

C → pseudo-prériode

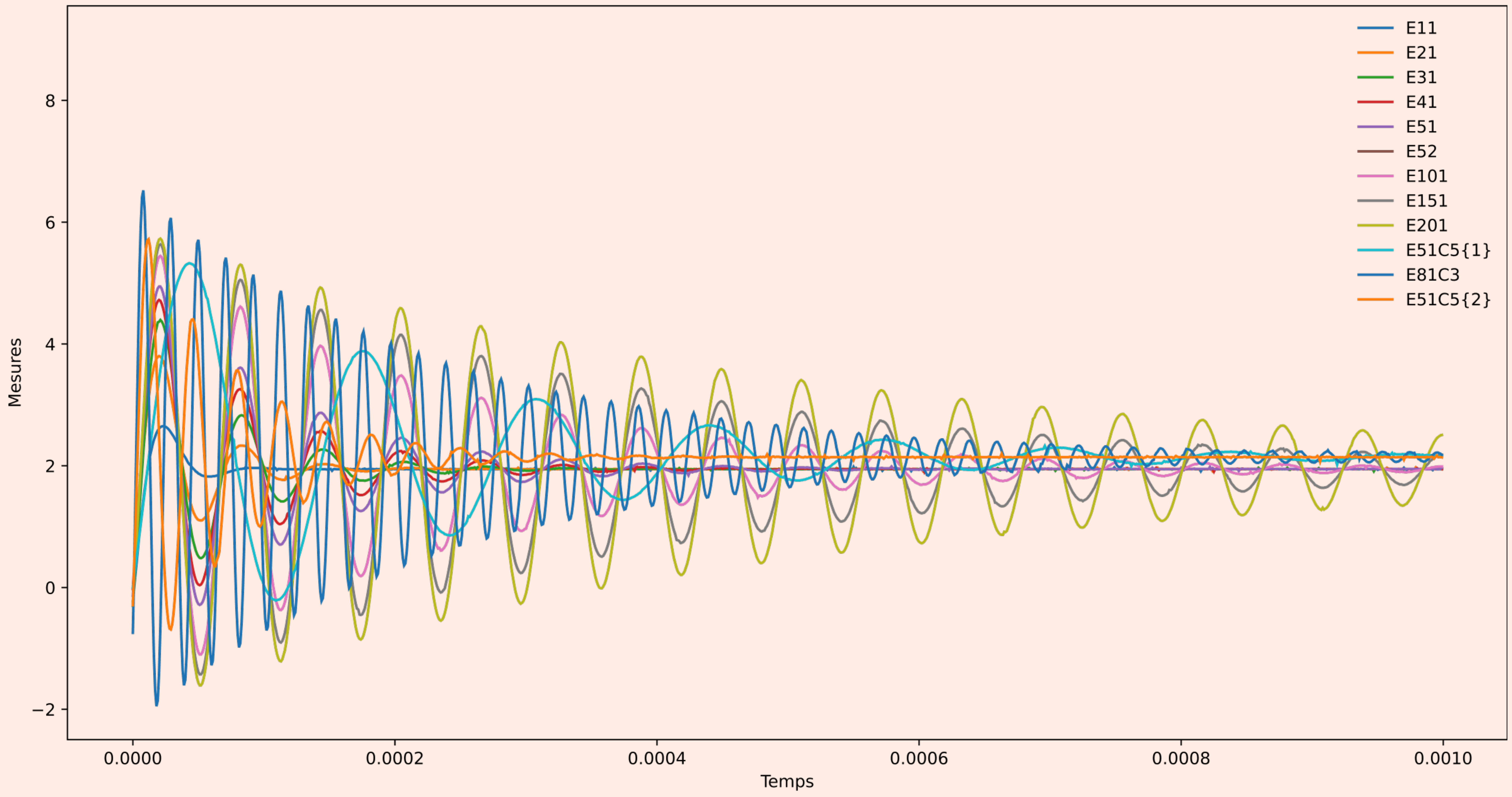
R : variable libre

3. Création du circuit





4. Exploitation des données



EXYCZ : alpha = X, beta = Y, C = Z

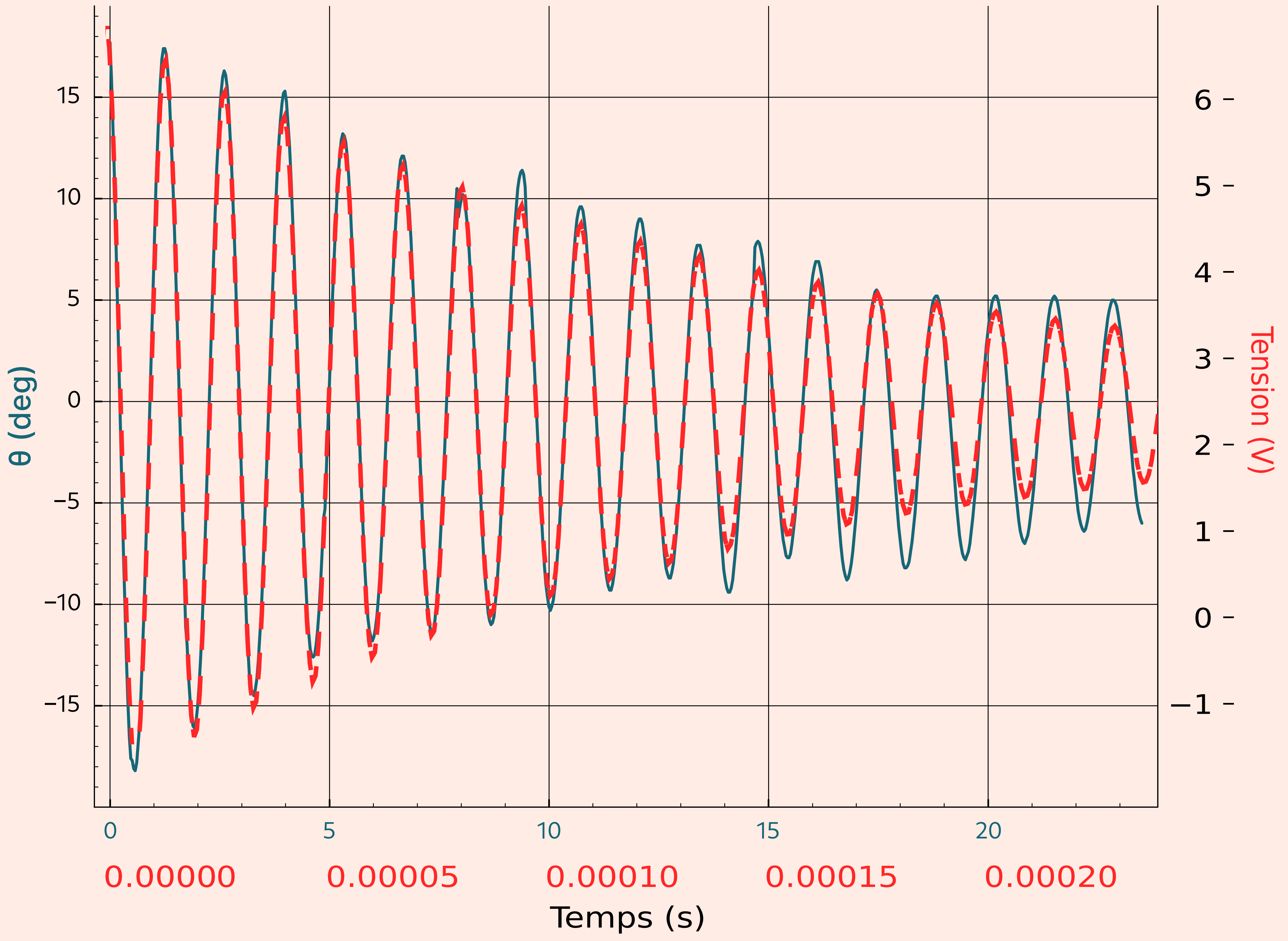
4. Exploitation des données

Problèmes

- Chaque paramètre (α, β, C, R) modifie plusieurs grandeurs (k, w, A, B) → résoudre un système de 4 équations, 4 inconnues
- La valeur finale dépend de β

4. Exploitation des données

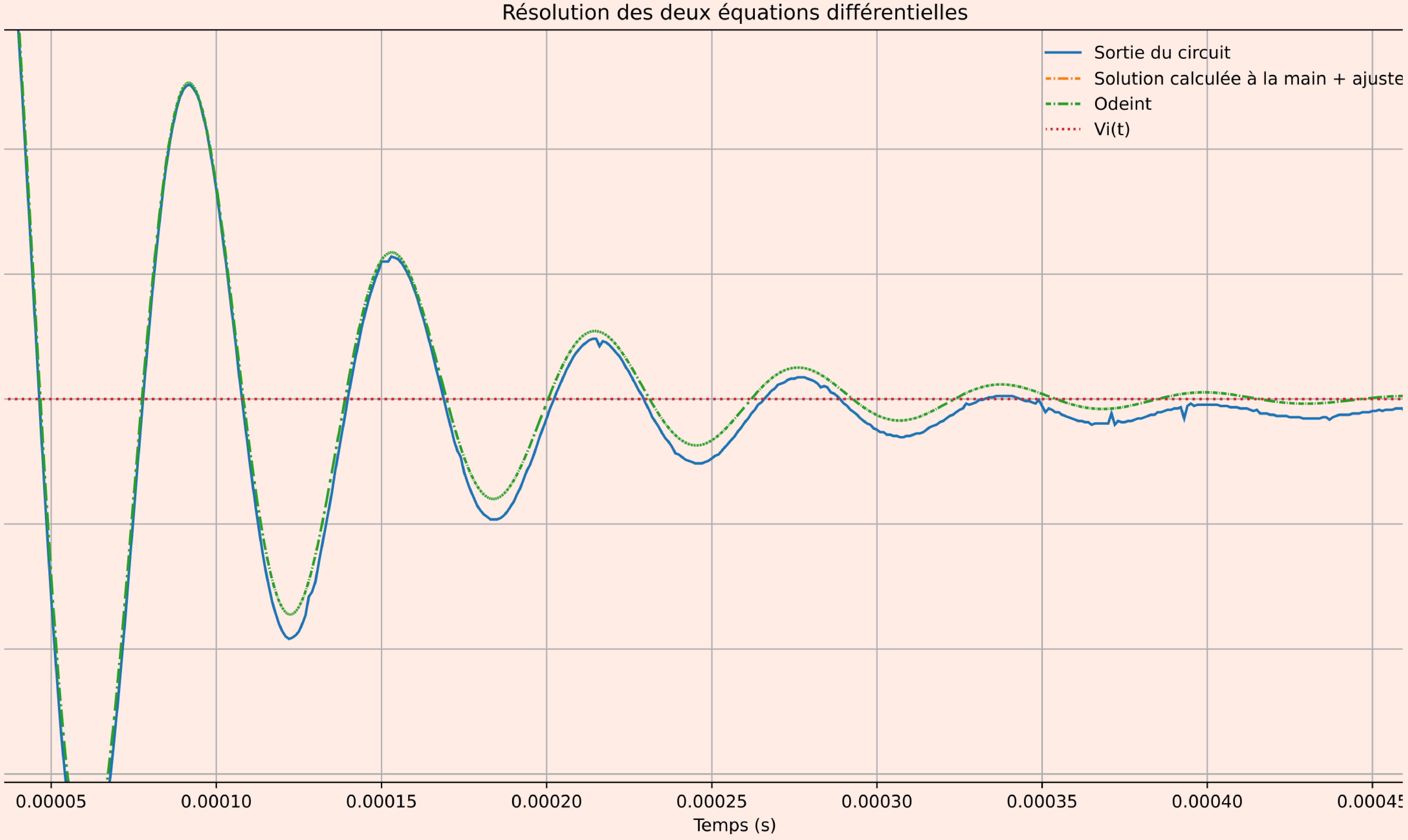
Application dans le cas du pendule plan



Résolution du système :
Sortie calculée : E81 → α = 8, β = 1

Ajustements réalisés :
C = 10nF théoriquement prédit ne fonctionnait pas parfaitement, C = 11nF fonctionne mieux.

5. Comparaison



Pour Vi = 2V, la valeur finale obtenue est 1,92V. On a donc une erreur de 4% environ.

6. Conclusion

Précision moins élevée
Adaptabilité moins bonne

Mais coût énergétique bien plus faible :

- **50 Wh** pour un ordinateur classique (résolution numérique)
- 3×2×2 mA = 0,012 A pour trois ALI, donc P=30V×0,012A=0,36W et **E = 0,36Wh**

Plus efficace sur des tâches répétitives, longues ou nécessitant un stockage important